Groupe B

MATHÉMATIQUES

E désigne un espace euclidien réel de dimension finie N; on note $(x|y)$ le produit scalaire de deux éléments x, y de E, $||x|| = (x|x)^{1/2}$ la norme de x. Lorsque F est une fonction numérique différentiable définie sur E, sa différentielle au point a, forme linéaire sur E, est notée $F'(a)$; la valeur de cette différentielle sur un vecteur h de E est désignée par $F'(a).h$.

Le problème utilise, aux questions II. 4°, 5°, le fait (qu'on admettra) que, dans E, toute suite bornée contient une sous-suite convergente.

I

1° φ et ψ sont deux fonctions numériques différentiables des deux variables réelles ξ, η. On suppose $\varphi(0,0) = 0$. On pose :

$$\mathcal{A} = \{ (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 / \varphi(\xi, \eta) = 0 \}.$$

On suppose d'autre part que $\psi'(0,0) \neq 0$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\psi(0,0) \geqslant \psi(\xi, \eta) \qquad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{A} \qquad \text{avec} \qquad \xi^2 + \eta^2 \leqslant \alpha.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(0,0) \quad , \quad \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(0,0) \ .$$

[On pourra supposer $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(0,0) \neq 0$, et admettre l'existence, pour ξ voisin de 0, d'une fonction $h(\xi)$, nulle et dérivable pour $\xi = 0$, telle que

$$(\xi, h(\xi)) \in \mathcal{A}.]$$

2° f et g sont deux fonctions numériques différentiables définies sur E. On pose $A = \{ x \in E / f(x) = 0 \}$. On suppose que l'élément a de A a la propriété suivante :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que} \qquad g(a) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in A \qquad \text{avec} \qquad ||x - a|| \leqslant \alpha.$$

On suppose encore $g'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f'(a) = \lambda g'(a)$. [On appliquera le résultat précédent aux fonctions $\varphi(\xi, \eta) = f(a + \xi u + \eta v)$, $\psi(\xi, \eta) = g(a + \xi u + \eta v)$, u et $v \in E$.]

II

On désigne par I l'application identique sur E. Les données sont : L endomorphisme sur E; C application de E dans E telle que $C(0) = 0$. L'équation

$$(1) \qquad (I - \lambda L)x + C(x) = 0,$$

où λ est un paramètre réel, a toujours la solution $x = 0$. On a en vue de montrer que, sous des hypothèses convenables, (1) possède des solutions non nulles pour certaines valeurs de λ.

1° Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(2) \qquad ||Lx|| \leqslant \alpha ||x|| \qquad \forall x \in E ;$$

en déduire

$$(3) \qquad -\alpha ||x||^2 \leqslant (Lx|x) \leqslant \alpha ||x||^2 \qquad \forall x \in E.$$

Dans la suite, on fera sur L les hypothèses suivantes :

$$(4) \qquad (Lx|y) = (Ly|x) \qquad \forall x, y \in E ;$$

$$(5) \qquad \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(Lx|x)}{||x||^2} = \frac{1}{\lambda_0} > 0 \ .$$

Montrer que, si $\frac{(Lx|x)}{||x||^2}$ ne dépend pas de $x \in E$, $x \neq 0$, alors L est une homothétie.

2° Dans la suite de cette partie II, on fera sur C les hypothèses suivantes : il existe une fonction numérique Φ définie sur E, positive, nulle à l'origine, différentiable, telle que

(6) $$\Phi'(x).h = (C(x) \mid h) \qquad \forall x, h \in E ;$$

(7) $\forall x \in E$, $\Phi(tx)$ est fonction croissante de $t \geqslant 0$.

Vérifier que $C(0) = 0$. Montrer que $x = 0$ est la seule solution de (1) lorsque $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$.

3° On pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}||x||^2 + \Phi(x), \qquad g(x) = \frac{1}{2}(Lx \mid x).$$

a. Montrer que f et g sont différentiables sur E et caractériser leurs différentielles.

b. Pour chaque $r > 0$, on définit $A_r = \{ x \in E / f(x) = r \}$. Vérifier les propriétés suivantes : A_r est borné dans E et ne contient pas l'origine; $\forall x \in E$, $x \neq 0$, il existe $t > 0$ unique tel que $tx \in A_r$.

4° *a.* Montrer qu'il existe x_r solution de

$$x_r \in A_r, \quad g(x_r) \geqslant g(y) \qquad \forall y \in A_r,$$

et qu'alors $g(x_r) > 0$. Utilisant I. 2°, prouver que x_r est solution non nulle de (1) pour $\lambda = \lambda_r$ convenable, $\lambda_r \geqslant \lambda_0$.

b. Que peut-on dire de λ_r si $C \equiv 0$? plus généralement, si C est un endomorphisme sur E ?

c. Si au contraire $\dfrac{||C(x)||}{||x||} \to +\infty$ avec $||x||$, montrer que (1) a des solutions non nulles pour une infinité de valeurs de λ.

5° On cherche à quelle condition, nécessaire et suffisante, (1) a des solutions non nulles pour des valeurs < 0 de λ.

a. Aux hypothèses (4) à (7) on ajoute

(8) $$(Lx \mid x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in E .$$

Montrer que $x = 0$ est la seule solution de (1) lorsque $\lambda < 0$.

b. On remplace (8) par l'hypothèse contraire

$$\inf_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(Lx \mid x)}{||x||^2} = \frac{1}{\lambda'_0} < 0 .$$

Par un raisonnement analogue à celui du 4°. *a*, trouver x'_r solution non nulle de (1) pour $\lambda = \lambda'_r$ convenable, $\lambda'_r \leqslant \lambda'_0$.

III

On considère l'équation différentielle :

(9) $$\frac{du}{dt} + (I - \lambda L)u + C(u) = 0 , \qquad t \geqslant 0 ,$$

dont les solutions sont des applications dérivables $u : [0, +\infty[\to E$. On veut étudier le comportement, lorsque $t \to +\infty$, d'une solution qui satisfait à la condition $u(0) = u_0$.

1° On reprend les hypothèses (4) à (8) du II; on suppose $\lambda < \lambda_0$. Montrer que toute solution de (9) vérifie :

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2 + 2\left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda_0}\right)||u(t)||^2 \leqslant 0 ,$$

où λ^+ est le plus grand des nombres λ et 0, et conclure que :

(10) $$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$$

Observer que, d'après les résultats de II, (10) n'est pas satisfaite pour toutes les valeurs de λ.

2° On se place désormais dans le cas $N = 1$, $E = \mathbf{R}$; L est l'application identique, C une fonction numérique continue telle que $x\,C(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$. Outre les hypothèses de II, ainsi réalisées avec $\lambda_0 = 1$, on suppose la fonction $x \longmapsto \dfrac{C(x)}{x}$ strictement décroissante pour $x < 0$, strictement croissante pour $x > 0$, avec :

(11) $$\lim_{x \to 0} \frac{C(x)}{x} = 0 , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{C(x)}{x} = +\infty , \quad \text{donc} \quad \frac{C(x)}{x} > 0 \ \forall x \neq 0.$$

On constate alors que, pour $\lambda > 1$, l'équation :

$$(1 - \lambda)x + C(x) = 0$$

possède, outre la solution $x = 0$, deux solutions non nulles $x_\lambda > 0$ et $x'_\lambda < 0$.

Étudier d'abord le cas particulier $C(x) = x^3$ en intégrant l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + (1-\lambda)\,u + u^3 = 0 \ , \qquad t \geqslant 0 \ . \tag{12}$$

[On pourra utiliser le changement de fonction inconnue $U = u^{-2}$]. Trouver $\lim_{t \to +\infty} u(t)$ en fonction de u_0 et de λ.

3° On suppose $u_0 > 0$ et $\lambda > 1$. On considère désormais l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + (1-\lambda)\,u + C(u) = 0 \ , \qquad t \geqslant 0 \ . \tag{13}$$

a. Montrer que $u(t) > 0 \quad \forall\, t \geqslant 0$ [on pourra supposer que u s'annule pour certaines valeurs positives de t, noter t_0 la plus petite d'entre elles, étudier les variations de u sur $[0, t_0[$].

b. Montrer que la fonction $t \longmapsto [u(t) - x_\lambda]^2$ est décroissante. En déduire que u est monotone, que $l = \lim_{t \to +\infty} u(t)$ et $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{du}{dt}$ existent.

c. Montrer que m ne peut prendre que la valeur 0. En déduire que l ne peut prendre que la valeur x_λ.

Quelle conclusion obtient-on lorsque $u_0 < 0$, $\lambda > 1$?

4° On suppose $u_0 = 0$ et $\lambda > 1$. Soit $\delta > 0$ tel que $|u| \leqslant \delta$ entraîne $\frac{C(u)}{u} \leqslant 1$.

a. Soit $t_0 > 0$ tel que $|u(t_0)| = \delta$, mais $|u(t)| < \delta$ pour $0 \leqslant t < t_0$: montrer que $t_0 \geqslant \frac{1}{\lambda}$.

b. Conclure que $u(t) = 0$, d'abord pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\lambda}$, puis $\forall\, t \geqslant 0$.

5° Étudier le cas $\lambda = 1$ en s'inspirant des méthodes employées dans les questions précédentes.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail